На правах рукописи

Христофорова Анастасия Владимировна

ДВОЙСТВЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

01.01.04 – геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2010

Работа выполнена на кафедре геометрии ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Столяров Алексей Васильевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Малаховский Владислав Степанович

доктор физико-математических наук, доцент
Толстихина Галина Аркадьевна

Ведущая организация: Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского

Защита состоится 7 октября 2010 года в XX часов XX минут на заседании диссертационного совета Д. 212.081.10 при Казанском государственном университете им. В. И. Ульянова-Ленина по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. XXX.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина (г. Казань, ул. Кремлевская, 18).

Автореферат разослан «__» хххххх 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Липачев Е. К.
канд. физ.-мат. наук, доцент

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Постановка вопроса и актуальность темы. Аффинная и в особенности проективная дифференциальная геометрия подмногообразий (поверхностей, распределений) является областью исследований многих геометров с начала XX столетия. Существенные результаты в геометрии гиперповерхности принадлежат Нордену А.П. [15] и его школе; Лаптев Г.Ф. разработал в инвариантной форме дифференциальную геометрию гиперповерхности в многомерном пространстве проективной связности с кривизной и кручением [9]; основные факты аффинной геометрии поверхности были распространены на гиперповерхность (в центроаффинном пространстве) в работах Фернандеса [30] и Лаугвитца [31]; задачи инвариантного оснащения подмногообразия в многомерных пространствах рассматривали А.Е. Либер [13], П.И. Швейкин [26], Г.Ф. Лаптев [12], Н.М. Остиану [16] и другие.

В дифференциальной геометрии подмногообразий важнейшее место занимает теория связностей, берущая начало от работ Т. Леви-Чивита [32] о параллельном перенесении вектора в римановой геометрии. Г. Вейль [33] для построения единой теории поля ввел понятие пространства аффинной связности. В середине XX века В. В. Вагнер [5] и Ш. Эресман [29] независимо друг от друга ввели общее понятие связности в расслоенном пространстве. Первые применения связности к геометрии подмногообразий в проективном пространстве дал Э. Картан [28]; дальнейшее развитие теория связностей получает в методе нормализации Нордена А.П. [15], позволяющем в касательных расслоениях подмногообразий проективного пространства индуцировать аффинные связности без кручения. Лаптев Г.Ф., следуя идеям Э. Картана, дал строгое определение пространства аффинной связности [10], [11]. Широков П.А. и Широков А.П. исследовали локальные строения подмногообразия в аффинном пространстве с помощью аффинной связности в касательном расслоении [27]. В работе Рыбникова А.К. [18] рассмотрены некоторые вопросы реализации аффинных связностей на оснащенных гиперповерхностях аффинного пространства.

В настоящее время теория связностей представляет собой обширную область исследования расслоенных пространств благодаря работам Чакмазяна А.В. [25], Лумисте Ю.Г. [14], Евтушика Л.Е. [7], [8], Рашевского П.К. [17], Васильева А.М. [6], Близникаса В.И. [4], Столярова А.В. [21], [22] и других геометров. Теория подмногообразий, погруженных в аффинное пространство и пространство аффинной связности, получила значительное развитие в работах Акивиса М.А. [1], Алшибая Э.Д. [2], [3], Степанова С.Е. [20], Симона У. [19]; вопросами геометрии оснащенной гиперповерхности занимались Столяров А.В. [21], [23] (в пространствах проективном, проективно-метрическом, проективной связности) и его ученики: Долгов С.В. (в проективном пространстве), Глухова Т.Н. (в конформном пространстве).

Предметом исследования диссертационной работы являются подмногообразия, погруженные в пространство аффинной связности, а также связности, индуцируемые оснащением рассматриваемых подмногообразий и поиск приложения связностей к изучению геометрии сетей. Задача сводится к изучению двойственной геометрии указанных оснащенных подмногообразий посредством исследования дифференциально-геометрических структур, индуцированных полями их фундаментальных и оснащающих объектов.

Актуальность диссертационного исследования обусловлена тем, что в нем изучается двойственная геометрия оснащенных подмногообразий в пространстве аффинной связности $A_{n,n}$ путем расширения его до пространства проективной связности $P_{n,n}$; заметим, что такой подход к изучению геометрии подмногообразий в $A_{n,n}$ до настоящего времени в математической литературе отсутствовал.

Цель работы. Цель настоящего диссертационного исследования заключается в решении следующих ключевых задач:

1) построение основ двойственной геометрии гиперповерхности (как голономной, так и неголономной) в пространстве аффинной связности;

2) построение двойственной теории линейных связностей (аффинных, проективных, нормальных), индуцируемых при различных классических оснащениях (в смысле А.П. Нордена, Э. Картана, Э. Бортолотти) гиперповерхности в пространстве аффинной связности;

3) приложение двойственной теории линейных связностей к исследованию геометрии сетей на рассматриваемых подмногообразиях (а именно, на гиперповерхности и на распределении гиперплоскостных элементов), вложенных в пространство аффинной связности.

Методы исследования. В диссертационной работе используются инвариантные методы дифференциально-геометрических исследований, а именно, теоретико-групповой метод продолжений и охватов Г.Ф. Лаптева [10], метод внешних дифференциальных форм Э. Картана [24], метод нормализации А.П. Нордена [15]. Применение указанных методов позволило получить дифференциально-геометрические факты, связанные с дифференциальными окрестностями высокого (до четвертого) порядков. Отметим, что результаты по теории линейных связностей получены с применением теории связностей в расслоенных пространствах в форме, данной Г.Ф. Лаптевым [10].

Все результаты получены в минимально специализированной системе отнесения, что позволило получить их в инвариантной форме. Рассмотрения в диссертации проводятся с локальной точки зрения. Все встречающиеся функции предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми (то есть изучаемые подмногообразия достаточно гладкие).

Научная новизна. До настоящего времени вопросы двойственной геометрии оснащенных подмногообразий в аффинном пространстве и пространстве аффинной связности математиками не рассматривались. Все результаты, полученные в диссертационном исследовании в ходе решения поставленных задач, являются новыми. В работе приведены доказательства сформулированных в виде теорем всех основных выводов.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа имеет теоретическое значение. Полученные в ней результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, погруженных в однородные и обобщенные пространства, а также при изучении пространств с линейной связностью, индуцируемых оснащением рассматриваемых многообразий.

Теория, разработанная в диссертационной работе, может быть использована в качестве специальных лекционных курсов для студентов старших курсов и аспирантов математических факультетов, а также при выполнении ими курсовых, дипломных и научных работ.

Апробация. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на конференциях и семинарах по современным проблемам геометрии: на конференциях студентов, аспирантов и докторантов Чувашского государственного педагогического университета (Чебоксары, 2006-2009 гг.), на заседаниях научно-исследовательского семинара молодых исследователей по дифференциальной геометрии (Чувашский госпедуниверситет, Чебоксары, 2006-2009 гг.), на региональной конференции «Современные вопросы геометрии и механики деформируемого твердого тела» (Чебоксары, 2006 г.); на заседаниях Молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения» (Казань, 2008-2009 гг.), XXIV Всероссийского конкурса-конференции научно-исследовательских, творческих и изобретательских работ обучающихся «Национальное достояние России» (работа отмечена серебряным знаком отличия и дипломом I-ой степени победителя конкурса) (Москва, 2009 г.), Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2009 г.), Международной научной конференции «Лаптевские чтения – 2009» (Москва – Тверь, 2009 г.), на заседании Казанского городского научно-исследовательского геометрического семинара (Казань, КГУ, 2009).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 17 печатных работах автора (см. [1] – [17]).

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертационная работа является самостоятельным исследованием автора. Все опубликованные научные работы по теме исследования выполнены без соавторов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения (исторический обзор, общая характеристика диссертации, содержание диссертации), трех глав и списка литературы, включающего 96 наименований. Полный объем диссертации составляет 110 страниц машинописного текста.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Глава I диссертации посвящена построению двойственной геометрии гиперповерхности V_{n-1} в пространстве аффинной связности $A_{n,n}$.

В § 1 приводятся основные факты, связанные с геометрией регулярной гиперповерхности V_{n-1} в пространстве $A_{n,n}$. Вводится понятие расширенного пространства аффинной связности $\overset{*}{A}_{n,n}$. Выводится дифференциальное уравнение гиперповерхности V_{n-1}, строятся поля фундаментальных и некоторых охваченных геометрических объектов до четвертого порядка включительно. С помощью этих полей в четвертой дифференциальной окрестности точки гиперповерхности V_{n-1} в $A_{n,n}$ найдено поле соприкасающихся гиперквадрик.

В § 2 доказано, что с регулярной гиперповерхностью V_{n-1} в $A_{n,n}$ ассоцируются два двойственных пространства проективной связности $P_{n-1,n}$ и $\overline{P}_{n-1,n}$ (базой $\overline{P}_{n-1,n}$ служит «тангенциальная гиперповерхность» $\overline{V}_{n-1}$).

В § 3 строятся инвариантные классические оснащения регулярной гиперповерхности в пространстве $A_{n,n}$: оснащение в смысле А.П. Нордена, оснащения в смысле Э. Катрана и Э. Бортолотти. Доказано, что

– нормализация одной из регулярных гиперповерхностей $V_{n-1} \subset A^{*}_{n,n}$ или $\overline{V}_{n-1} \subset \overline{P}_{n-1,\,n}$ равносильна нормализации другой; при этом найдены соотношения, связывающие компоненты полей оснащающих объектов;

– функции F^i_n, F^0_i и W^i_n, W^0_i, определяющие соответственно нормализацию Фубини и Вильчинского регулярной гиперповерхности, задают на ней двойственные поля нормалей первого и второго родов;

– оснащение в смысле Э. Картана регулярной гиперповерхности V_{n-1} в пространстве аффинной связности равносильно оснащению ее двойственного образа $\overline{V}_{n-1}$ в смысле Э. Бортолотти, и наоборот; определены зависимости, связывающие оснащающие объекты.

Глава II диссертации посвящена построению основ теории двойственных линейных связностей, индуцируемых на оснащенной регулярной гиперповерхности V_{n-1} в пространстве аффинной связности $A_{n,n}$.

В **§ 1** второй главы изучаются аффинные связности на нормализованной регулярной гиперповерхности V_{n-1} в пространстве $A_{n,n}$. Заметим, что в случае вырождения пространства аффинной связности в аффинное пространство A_n изучаемые связности являются двойственными аффинными связностями (без кручения) первого и второго родов, рассмотренными А.П. Норденом [15].

Центральными результатами **§ 1** являются (теоремы II.1 – II.5):

1) на нормализованной регулярной гиперповерхности V_{n-1} в $A_{n,n}$ индуцируются две двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, обобщенно сопряженные относительно поля тензора Λ^n_{ij} гиперповерхности V_{n-1}; при этом в случае симметрии тензора Λ^n_{ij} их средняя связность $\overset{0}{\nabla}$ является вейлевой (вообще говоря, с кручением) с полем метрического тензора Λ^n_{ij};

2) найдена геометрическая интерпретация условия совпадения связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ при некоторых предположениях, а именно: если на нормализованной регулярной гиперповерхности V_{n-1} в $A_{n,n}$ с полем симметричного тензора Λ^n_{ij} индуцируются двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ без кручения, то эти связности совпадают тогда и только тогда, когда нормализация взаимна относительно поля соприкасающихся гиперквадрик и гиперквадрики этого поля имеют соприкосновение третьего порядка с гиперповерхностью;

3) если нормализация регулярной гиперповерхности V_{n-1} в аффинном пространстве A_n взаимна относительно поля соприкасающихся гиперквадрик, то

аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ могут быть эквиаффинными лишь одновременно; в случае их эквиаффинности средняя связность $\overset{0}{\nabla}$ является римановой с полем метрического тензора Λ_{ij}^{n};

4) геометрии двойственных аффинных связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемых нормализацией Фубини регулярной гиперповерхности V_{n-1} в аффинном пространстве A_n, являются эквиаффинными, а их средняя геометрия – риманова;

5) если для некоторой взаимной нормализации регулярной гиперповерхности V_{n-1} в аффинном пространстве A_n тензоры Риччи связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ совпадают, то данная нормализация является нормализацией Вильчинского.

В случае аффинной нормализации гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_n^*$ показано (теоремы II.6, II.7), что:

1) геометрия связности второго рода $\overset{2}{\nabla}$ является проективно-евклидовой;

2) если полем нормалей первого рода служит поле аффинных нормалей, то связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ одновременно являются эквиаффинными, а их средняя связность $\overset{0}{\nabla}$ – риманова с полем метрического тензора Λ_{ij}^{n}.

В § 2 главы II получены приложения двойственных аффинных связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемых оснащением в смысле А. П. Нордена регулярной гиперповерхности V_{n-1} в пространстве $A_{n,n}$, к геометрии сетей, заданных на V_{n-1}. Найдены аналитические условия, при которых сопряженная сеть, заданная на нормализованной гиперповерхности с полем симметричного тензора Λ_{ij}^{n}, является геодезической или чебышевской первого или второго рода. Доказана справедливость следующих утверждений (теоремы II.9, II.9*):

1) если сеть, заданная на регулярной нормализованной гиперповерхности V_{n-1} с полем симметричного тензора Λ_{ij}^{n}, вложенной в пространство аффинной связности $A_{n,n}$, является геодезической первого (второго) рода, то поле нормали первого (второго) рода есть поле гармонических прямых (гиперпрямых) сети;

2) сопряженная сеть на регулярной нормализованной гиперповерхности V_{n-1} с полем симметричного тензора Λ_{ij}^{n}, вложенной в $A_{n,n}$, является сетью с совпавшими псевдофокусами (псевдофокальными гиперплоскостями) тогда и только тогда, когда относительно поля гармонических гиперпрямых $[F_i]$ (гармонических прямых $[\eta_i]$) данная сеть есть геодезическая второго (первого) рода.

В случае аффинного пространства A_n доказано (теоремы II.10, II.11), что:

1) двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемые взаимной нормализацией регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_n (n > 3)$, когда полем нормалей второго (первого) рода служит поле гармонических гиперпрямых

(прямых) сопряженной чебышевской сети $\Sigma \subset V_{n-1}$ первого (второго) рода, являются эквиаффинными, а их средняя геометрия – риманова;

2) если гиперповерхность $V_{n-1} \subset A_n (n > 3)$, несущая голономную сопряженную сеть с совпавшими псевдофокусами и псевдофокальными гиперплоскостями, нормализована полями гармонических прямых и гиперпрямых сети, то индуцируемые аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ являются эквиаффинными, а их средняя геометрия – риманова.

В § 3 главы II диссертации изучаются двойственные проективные связности на оснащенной в смысле Э. Картана и Э. Бортолотти регулярной гиперповерхности V_{n-1} в пространстве аффинной связности $A_{n,n}$.

Доказано (теорема II.13, II.15), что оснащение в смысле Э. Картана (Э. Бортолотти) регулярной гиперповерхности V_{n-1} в $A_{n,n}$ индуцирует две двойственные проективные связности (вторая проективная связность определяется в случае симметрии тензора Λ_{ij}^n); соответствующие пространства проективной связности обозначены $\overset{1}{P}_{n-1,n-1}$ и $\overset{2}{P}_{n-1,n-1}$ ($\overset{\overline{1}}{P}_{n-1,n-1}$ и $\overset{\overline{2}}{P}_{n-1,n-1}$). Справедливы утверждения (теоремы II.12, II.14, II.15):

1) оснащающая точка N_n гиперповерхности V_{n-1} в аффинном пространстве A_n неподвижна тогда и только тогда, когда $\overset{1}{P}_{n-1,n-1}$ является плоским;

2) необходимым и достаточным условием совпадения связностей двойственных пространств $\overset{1}{P}_{n-1,n-1}$ и $\overset{2}{P}_{n-1,n-1}$ ($\overset{\overline{1}}{P}_{n-1,n-1}$ и $\overset{\overline{2}}{P}_{n-1,n-1}$) является вырождение гиперповерхности V_{n-1} в гиперквадрику.

3) в случае $A_{n,n} \equiv A_n$ пространство $\overset{\overline{1}}{P}_{n-1,n-1}$ является проективным тогда и только тогда, когда оснащающая плоскость $\Pi_{n-1}(A_0)$ неподвижна.

В § 4 установлена связь между двойственными аффинными и проективными связностями на оснащенной регулярной гиперповерхности V_{n-1} в $A_{n,n}$ с полем симметричного тензора Λ_{ij}^n. Показано, что:

1) на оснащенной в смысле Э. Картана гиперповерхности V_{n-1} в $A_{n,n}$ кроме пространства $\overset{1}{P}_{n-1,n-1}$ индуцируется еще четыре пространства проективной связности $\overset{a}{P}_{n-1,n-1} (a = \overline{2,5})$; найдены строения компонентов их тензоров кривизны-кручения;

2) на нормализованной гиперповерхности V_{n-1} в $A_{n,n}$ индуцируется пять пространств аффинной связности $\overset{q}{A}_{n-1,n-1} (q = \overline{1,5})$, причем связностью пространства $\overset{1}{A}_{n-1,n-1}$ является аффинная связность $\overset{1}{\nabla}$. Найдены строения компонентов тензоров кривизны и кручения указанных пространств.

Основным результатом параграфа является теорема II.17: на оснащенной в смысле Нордена-Картана регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ каждое пространство аффинной связности $\overset{q}{A}_{n-1,n-1}$ при фиксированном $q = \overline{1,5}$, $q \neq 3$ является сужением соответствующего пространства проективной связности $\overset{q}{P}_{n-1,n-1}$; причем в случае $q = 3$ сужением пространства $\overset{3}{P}_{n-1,n-1}$ является пространство аффинной связности $\overset{3}{\widehat{A}}_{n-1,n-1}$, определяемое системой форм:

$$\overset{3}{\widehat{\theta}}{}^i = 2\omega_0^i,\ \overset{3}{\widehat{\theta}}{}^i_j = \overset{1}{\theta}{}^i_j + (\frac{1}{n+1}\Lambda_n^{is} D_{sjk}^n - \delta_j^i T_k^0 - \delta_k^i T_j^0)\omega_0^k = \overset{3}{\theta}{}^i_j \ .$$

В § 5 рассматриваются двойственные нормальные связности на оснащенной регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$.

В п. 1 § 5 доказано, что на нормализованной гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ в расслоении нормалей первого и второго родов индуцируются соответственно нормальные связности $\nabla^{\perp}$ и $\overline{\nabla}^{\perp}$, двойственные по отношению друг к другу (при этом нормализация предполагается отличной от аффинной). Справедливы следующие предложения (теоремы II.19–II.22, II.24, II.25):

1) связности $\nabla^{\perp}$ и $\overline{\nabla}^{\perp}$ могут быть полуплоскими, а в случае $A_{n,n} \equiv A_n$ – плоскими лишь одновременно;

2) связности $\nabla^{\perp}$ и $\overline{\nabla}^{\perp}$ совпадают тогда и только тогда, когда нормальная связность $\nabla^{\perp}$ (а следовательно, и $\overline{\nabla}^{\perp}$) полуплоская;

3) для того, чтобы нормальная связность $\nabla^{\perp}$ ($\overline{\nabla}^{\perp}$), индуцируемая на нормализованной гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_n$, была плоской, необходимо и достаточно, чтобы конгруэнция (псевдоконгруэнция) нормалей первого (второго) рода и псевдоконгруэнция (конгруэнция) нормалей второго (первого) рода составляли пару, односторонне расслояемую в сторону от нормалей первого (второго) рода к нормали второго (первого) рода;

4) на нормализованной гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_n$ поле нормалей первого рода является параллельным в нормальной связности $\nabla^{\perp}$, а поле нормалей второго рода является параллельным в нормальной связности $\overline{\nabla}^{\perp}$.

В п. 2 § 5 рассматриваются нормальные связности на оснащенной в смысле Нордена-Картана и Нордена-Бортолотти гиперповерхности V_{n-1} с полем симметричного тензора Λ_{ij}^n в пространстве аффинной связности $A_{n,n}$.

Одним из основных результатов являются теоремы II.26 и II.31: на оснащенной в смысле Нордена-Картана (Нордена-Бортолотти) регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ с полем симметричного тензора Λ_{ij}^n в расслоении нормалей первого (второго) рода, кроме $\nabla^{\perp}$ ($\overline{\nabla}^{\perp}$), индуцируются еще четыре нормальные связности $\overset{1a}{\nabla}{}^{\perp}$ ($\overset{2a}{\nabla}{}^{\perp}$), $a = \overline{1,4}$.

Найдены условия попарного совпадения рассматриваемых нормальных связностей и условия вырождения любой тройки нормальных связностей в одну; например (теоремы II.28, II.29):

1) нормальные связности $\nabla^{\perp}$ и $\overset{11}{\nabla}{}^{\perp}$, $\overset{12}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{13}{\nabla}{}^{\perp}$, индуцируемые в расслоении нормалей первого рода на оснащенной в смысле Нордена-Картана гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$, совпадают тогда и только тогда, когда нормализация гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ является взаимной;

2) на оснащенной в смысле Нордена-Картана гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ совпадение любой тройки нормальных связностей из совокупности $\left\{\nabla^{\perp}, \overset{11}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{12}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{13}{\nabla}{}^{\perp}\right\}$ равносильно одному из следующих предложений:

а) нормализация гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_{n,n}$ есть нормализация Фубини,

б) рассматриваемая четверка нормальных связностей вырождается в одну.

Справедливы двойственные предложения (теоремы II.33, II.34).

Доказаны следующие утверждения:

1) связность $\nabla^{\perp} = \overset{11}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{12}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{13}{\nabla}{}^{\perp}$ ($\overline{\nabla}^{\perp} = \overset{21}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{22}{\nabla}{}^{\perp} \equiv \overset{23}{\nabla}{}^{\perp}$), индуцируемая нормализацией Фубини гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_n$, является полуплоской.

2) если на оснащенной в смысле Нордена-Картана гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_n (n > 3)$, несущей голономную сеть с совпавшими псевдофокусами и псевдофокальными гиперплоскостями, полями нормализующих объектов являются поля гармонических прямых и гиперпрямых сети, то нормальные связности $\nabla^{\perp}, \overset{11}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{12}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{13}{\nabla}{}^{\perp}$ являются полуплоскими.

3) если на оснащенной в смысле Нордена-Бортолотти гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_n$ все нормали второго рода лежат в одной гиперплоскости, то индуцируемые нормальные связности $\overline{\nabla}^{\perp}$, $\overset{2a}{\nabla}{}^{\perp}$ являются плоскими тогда и только тогда, когда они полуплоские;

4) если нормальные связности $\nabla^{\perp}$ и $\overset{12}{\nabla}{}^{\perp}$ ($\overline{\nabla}^{\perp}$ и $\overset{22}{\nabla}{}^{\perp}$), индуцируемые в расслоении нормалей первого (второго) рода на оснащенной в смысле Нордена-Картана (Нордена-Бортолотти) гиперповерхности $V_{n-1} \subset A_n$, совпадают, то средняя аффинная связность $\overset{0}{\nabla}$ является римановой.

Глава III диссертации посвящена изучению двойственной геометрии оснащенного регулярного распределения гиперплоскостных элементов M в пространстве аффинной связности $A_{n,n}$.

В § 1 вводится понятие распределения гиперплоскостных элементов, погруженного в пространство аффинной связности. В репере нулевого порядка выводятся дифференциальные уравнения распределения M, а также строятся поля фундаментальных геометрических объектов до третьего порядка включительно. Доказано (теорема III.1), что регулярное распределение гиперплоскостных элементов M в $A_{n,n}$ индуцирует:

– во второй дифференциальной окрестности пространство проективной связности $\overline{P}_{n,n}$, двойственное $A^*_{n,n}$ относительно инволютивного преобразования их форм связности, причем пространства $A^*_{n,n}$ и $\overline{P}_{n,n}$ могут быть плоскими лишь одновременно;

– в первой дифференциальной окрестности многообразие $\overline{M}$ в $\overline{P}_{n,n}$, двойственное исходному распределению M.

В п. 3 § 1 рассматривается оснащенное в смысле А. П. Нордена распределение гиперплоскостных элементов M в $A_{n,n}$. Доказано, что нормализация одного из регулярных распределений гиперплоскостных элементов M в $A_{n,n}$ или $\overline{M}$ в $\overline{P}_{n,n}$ равносильна нормализации другого.

Основной результат § 2 главы III содержится в теореме III.3: для того чтобы при задании регулярного распределения гиперплоскостных элементов M в $A_{n,n}$ индуцировалось пространство аффинной связности $\overline{A}_{n,n}$, двойственное исходному $A_{n,n}$, необходимо и достаточно, чтобы слоевые формы θ^i_n пространства $A_{n,n}$ обращались в нуль; при этом пространства $A_{n,n}$ и $\overline{A}_{n,n}$ могут быть плоскими лишь одновременно.

Геометрическое истолкование условия существования пространства $\overline{A}_{n,n}$, двойственного $A_{n,n}$, заключается в теореме III.4: для того чтобы при задании регулярного распределения гиперплоскостных элементов M в $A_{n,n}$ индуцировалось пространство аффинной связности $\overline{A}_{n,n}$, двойственное исходному, достаточно, чтобы направление A_0A_n в связности пространства $A_{n,n}$ переносилось параллельно вдоль любой кривой пространства $A_{n,n}$.

Найдено аналитическое условие, в случае выполнения которого при задании регулярного распределения гиперплоскостных элементов M в $A_{n,n}$ двойственные аффинные связности (подсвязности), определяемые соответственно системами структурных форм $\{\theta^I, \theta^i_j\}$ и $\{\overline{\theta}^I, \overline{\theta}^i_j\}$ двойственных пространств $A_{n,n}$ и $\overline{A}_{n,n}$, являются обобщенно сопряженными относительно поля тензора Λ^n_{ij} вдоль любой кривой пространства аффинной связности $A_{n,n}$.

Основные результаты § 3 главы III отражены в следующих предложениях (теоремы III.6 – III.10):

1) на нормализованном регулярном распределении M в $A_{n,n}$ индуцируются две двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, обобщенно сопряженные относительно поля тензора Λ^n_{ij} вдоль любой кривой, принадлежащей распределению M в $A_{n,n}$; при некоторых предположения найдено условие их совпадения (теорема III.7).

2) нормализация регулярного распределения M в $A_{n,n}$ индуцирует двойственные пространства аффинной связности $\overset{1}{A}_{n,n}$ и $\overset{2}{A}_{n,n}$, определяемые соответственно системами форм $\left\{\overset{1}{\Omega}{}^{J}_{K}\right\}$ и $\left\{\overset{2}{\Omega}{}^{J}_{K}\right\}$ (теорема III.8);

3) аффинная связность $\overset{1}{\nabla}$ и связность $\left\{\overset{1}{\Omega}{}^{i}_{0}, \overset{1}{\Omega}{}^{i}_{j}\right\}$ совпадают тогда и только тогда, когда направление нормали первого рода ν^{i}_{n} в связности пространства $\overset{1}{A}_{n,n}$ переносится параллельно вдоль любой кривой, принадлежащей распределению M в $A_{n,n}$; при этом нормальная точка нормали ν^{i}_{n} совпадает с ее точкой Кенигса;

4) направление нормали первого рода ν^{i}_{n} распределения гиперплоскостных элементов M в A_{n} $(n \geq 3)$ обладает свойством абсолютного параллелизма относительно связности пространства $\overset{1}{A}_{n,n}$ тогда и только тогда, когда точка Кенигса этой нормали неподвижна.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Для данного пространства аффинной связности $A_{n,n}$ введено понятие расширенного пространства $A^{*}_{n,n}$. В разных дифференциальных окрестностях построены инвариантные внутренним образом определяемые оснащения регулярной гиперповерхности V_{n-1} и распределения M гиперплоскостных элементов в пространстве аффинной связности $A_{n,n}$.

2. Построены основы теории двойственных линейных связностей (аффинных, проективных и нормальных), индуцируемых различными оснащениями гиперповерхности в $A_{n,n}$ (оснащениями в смысле А.П. Нордена, Э. Картана, Э. Бортолотти).

3. Найдено приложение двойственных аффинных связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ к изучению внутренней геометрии некоторых классов сопряженных сетей на гиперповерхности V_{n-1} в $A_{n,n}$ (чебышевских и геодезических сетей первого и второго родов, сетей с совпавшими псевдофокусами и псевдофокальными гиперплоскостями).

4. При задании регулярного распределения M гиперплоскостных элементов в пространстве $A_{n,n}$ найдено условие существования пространства аффинной связности $\overline{A}_{n,n}$, двойственного исходному пространству $A_{n,n}$,

5. Исследована геометрия двойственных аффинных связностей, индуцированных нормализацией регулярного распределения гиперплоскостных элементов M в $A_{n,n}$.

Список литературы

[1] *Акивис М. А.* К аффинной теории соответствия Петерсона между гиперповерхностями / М. А. Акивис // Известия вузов. Математика. – Казань, 1994. – № 4. – С. 3-9.

[2] *Алшибая Э. Д.* К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве / Э. Д. Алшибая // Тр. Геометр. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР. – 1974. – Т. 5. – С. 169-193.

[3] *Алшибая Э. Д.* Об аффинных связностях на распределении гиперплоскостных элементов в A_{n+1} / Э. Д. Алшибая // Известия вузов. Математика. – Казань, 2002. – № 8. – С. 72-74.

[4] *Близникас В. И.* Некоторые внутренние геометрии гиперповерхности пространства аффинной связности / В. И. Близникас // Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб. – 1964. – Т. 4. – № 2. – С. 165-182.

[5] .*Вагнер В. В.* Теория составного многообразия / В. В. Вагнер // Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу. – 1950. – В. 8. – С. 11-72.

[6] *Васильев А. М.* Инвариантные аффинные связности в пространстве линейных элементов / А.М. Васильев // Матем. сб. – 1963. – Т. 6. – № 4. – С. 411-424.

[7] .*Евтушик Л. Е.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л. Е. Евтушик, Ю. Г. Лумисте, Н. М. Остиану, А. П. Широков // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. – 1979. – Т. 9. – 246 с.

[8] *Евтушик Л. Е.* Дифференциальные связности и инфинитезимальные преобразования продолженной псевдогруппы / Л. Е. Евтушик // Тр. Геометр. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР. – 1969. – Т. 2. – С. 119-150.

[9] .*Лаптев Г. Ф.* Гиперповерхность в пространстве проективной связности / Г. Ф. Лаптев // Докл. АН СССР. – 1958. – Т. 121. – № 1. – С. 41-44.

[10] *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий / Г. Ф. Лаптев // Труды Моск. матем. общества. – 1953. – Т. 2. – С. 275-382.

[11] *Лаптев Г. Ф.* О выделении одного класса внутренних геометрий, индуцированных на поверхности пространства аффинной связности / Г. Ф. Лаптев // ДАН СССР. – 1943. – Т. 41. – № 8. – С. 329-331.

[12] *Лаптев Г. Ф.* Об инвариантном оснащении поверхности в пространстве аффинной связности / Г. Ф. Лаптев // Докл. АН СССР. – 1959. – № 3. – С. 490-493.

[13] *Либер А. Е.* О геометрии поверхностей в аффинных пространствах // А. Е. Либер // Научн. ежегодник. – Саратовск. гос. ун-т, 1955. – С. 669-671.

[14] *Лумисте Ю. Г.* Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях / Ю. Г. Лумисте // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1965. – В. 177. – С. 6-42.
[15] *Норден А. П.* Пространства аффинной связности / А. П. Норден. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
[16] *Остиану Н. М.* Об инвариантном оснащении многомерной поверхности в проективном пространстве / Н. М. Остиану // Тезисы докл. Второй Всес. геом. конф. – Харьков, 1964. – С. 203.
[17] *Рашевский П. К.* Симметрические пространства аффинной связности с кручением. I. / П. К. Рашевский // Тр. сем. по векторн. и тензорн. анализу. – 1950. – В. 8. – С. 82-92.
[18] *Рыбников А. К.* Аффинные связности, индуцируемые на многомерных поверхностях аффинного пространства / А. К. Рыбников // Тр. Геометр. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР. – 1974. – Т. 6. – С. 135-155.
[19] *Симон У.* К аффинной теории гиперповерхностей: калибровочно-инвариантные структуры / У. Симон // Известия вузов. Математика. – Казань, 2004. – № 11. – С. 53-81.
[20] *Степанов С. Е.* Реализация чебышевской связности на гиперповерхности аффинного пространства / С. Е. Степанов // Соврем. геометрия : Вопросы дифференц. геометрии. – Л. – 1980. – С. 73-76.
[21] *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий / А. В. Столяров. – Чебоксары, 1994. – 290 с.
[22] *Столяров А. В.* Двойственная геометрия нормализованного пространства аффинной связности / А. В. Столяров // Вестник Чувашск. гос. пед. ун-та. – 2005. – № 4. – С. 21 – 27.
[23] *Столяров А. В.* О сетях и полярно сопряженных конфигурациях на гиперповерхностях проективного пространства / А. В. Столяров // Изв. вузов. Матем. – 1970. – № 7 – С. 96-101.
[24] *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана / С. П. Фиников. – М.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.
[25] *Чакмазян А. В.* Нормальная связность в геометрии подмногообразий / А. В. Чакмазян. – Ереван: Армянск. пед. ин-т, 1990. – 116 с.
[26] *Швейкин П. И.* Инвариантные построения на *m*-мерной поверхности в *n*-мерном аффинном пространстве / П. И. Швейкин // Докл. АН СССР. – 1958. – № 5. – С. 811-814.
[27] *Широков П. А.* Аффинная дифференциальная геометрия / П. А. Широков, А. П. Широков. – М.: Физ-матем. изд., 1959.
[28] *Cartan E.* Les éspaces a connexion projective – Труды семинара по векторному и тензорному анализу / E. Cartan. – МГУ, 1937. – № 4. – С. 147-159.
[29] *Ehresmann C.* Les connections infinitesimales dans un espace fibre differentiable / C. Ehresmann // Collque de Topologie. – Bruxelles, 1950. –P. 29-55.
[30] *Fernández G.* Geometria differencial afin hipersperficies / G. Fernández // Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fis. argent. − 1955.− 17. − 29-38.

[31] *Laugwitz D.* Zur Differential geometrie der Hyperflächen in Vektorräumen und zur affingeometrischen Deutung der Theorie der Finsler-Räume. Math. Z. − 1957.− 67. − V. 1. − 63-74.
[32] *Levi-Civita T.* Nozioni di parallelismo in una varieta qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvature Riemannianna / Levi-Civita T. // Rend. circ. vatem. – Palermo, 1917. – V. 42. – P. 173-205.
[33] *Weyl H.* Raum, Zeit, Materie / H. Weyl. – Berlin, 1918.

РАБОТЫ АВТОРА, ОПУБЛИКОВАННЫЕ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] *Христофорова А. В*. Двойственная геометрия гиперповерхности в пространстве аффинной связности / А. В. Христофорова // Вестник Чувашск. гос. пед. ун-та. – 2006. – № 3(50). – С.35 – 42.
[2] *Христофорова А. В*. Двойственная геометрия сетей на гиперповерхности в пространстве аффинной связности / А. В. Христофорова // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.39 : Межвуз. темат. сб. науч. тр. – Калининград, 2008. – С. 140-147.
[3] *Христофорова А. В*. Двойственность геометрии гиперповерхности в пространстве аффинной связности / А. В. Христофорова // Материалы Шестой молодежной науч. школы-конф. – Казань : Изд-во Казанского мат. об-ва, 2007. – Т. 36. – С. 238–241.
[4] *Христофорова А. В*. Двойственность геометрии распределения гиперплоскостных элементов в пространстве аффинной связности / А. В. Христофорова // ВИНИТИ РАН. – 2009. – № 28-В2009 Деп. – 20 с.
[5] *Христофорова А. В*. Двойственные аффинные связности на нормализованной гиперповерхности в пространстве аффинной связности / А. В. Христофорова // ВИНИТИ РАН. – 2008. – № 237-В2008 Деп. – 13 с.
[6] *Христофорова А. В*. Двойственные аффинные связности на распределении гиперплоскостных элементов в пространстве аффинной связности / А. В. Христофорова // Материалы Седьмой молодежной науч. школы-конф. – Казань : Изд-во Казанского мат. об-ва, 2008. – Т. 37. – С. 186-189.
[7] *Христофорова А. В*. Двойственные линейные связности на оснащенной гиперповерхности пространства аффинной связности / А. В. Христофорова // Известия вузов. Математика. – Казань, 2009. – № 11. – С. 72-79.
[8] *Христофорова А. В*. Двойственные проективные связности на гиперповерхности в пространстве аффинной связности / А. В. Христофорова // Вестник докторантов, аспирантов, студентов Чув. гос. пед. ун-та. – Чебоксары, 2008. – № 1(11). – С. 30-35
[9] *Христофорова А. В*. Двойственные пространства аффинной связности на распределении гиперплоскостных элементов в пространстве аффинной связности / А. В. Христофорова // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.40 : Межвуз. темат. сб. науч. тр. – Калининград, 2009. – С. 137-144.
[10] *Христофорова А. В*. Двойственные пространства аффинной связности, определяемые неголономной гиперповерхностью / А. В. Христофорова // Вестник Чувашск. гос. пед. ун-та. – 2009. – № 1(61). – С.36 – 43.

[11] *Христофорова А. В*. Двойственные связности на гиперповерхности / А. В. Христофорова // Труды XLVII Межд. науч. студ. конф. «Студент и НТП»: Математика. – Новосибирск, 2009. – С. 104-105.
[12] *Христофорова А. В*. Исследование гиперповерхности в пространстве аффинной связности / А. В. Христофорова // Вестник Чувашск. гос. пед. ун-та. – 2008. – № 2(58). – С.46 – 52.
[13] *Христофорова А. В*. Линейные связности, индуцируемые оснащением гиперповерхности пространства аффинной связности / А. В. Христофорова // Сб. тезисов докладов участников XXIV Всерос. конф. обуч-ся «Национальное Достояние России». – Минобрнауки РФ, Рособразование, РОСКОСМОС, РАО, НС «Интеграция», 2009. – С. 725-726
[14] *Христофорова А. В*. О двойственной геометрии гиперповерхности в пространстве аффинной связности / А. В. Христофорова // ВИНИТИ РАН. – 2006. – № 713-В2006 Деп. – 10 с.
[15] *Христофорова А. В*. О двойственной геометрии распределения гиперплоскостных элементов в пространстве аффинной связности / А. В. Христофорова // Труды Межд. науч. конф. «Лаптевские чтения-2009». – М., 2009. – С.37.
[16] *Христофорова А. В*. Проективные и аффинные связности на гиперповерхности пространства аффинной связности / А. В. Христофорова // ВИНИТИ РАН. – 2009. – № 412-В2009 Деп. – 17 с.
[17] *Христофорова А. В*. Фундаментально-групповые линейные связности на гиперповерхности в пространстве аффинной связности / А. В. Христофорова // ВИНИТИ РАН. – 2008. – № 910-В2008 Деп. – 31 с.

Подписано к печати _______________ . Формат 60×84 / $_{16}$.
Бумага ксероксная. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ ____ .

Отдел оперативной полиграфии
Чувашского государственного педагогического университета
428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.